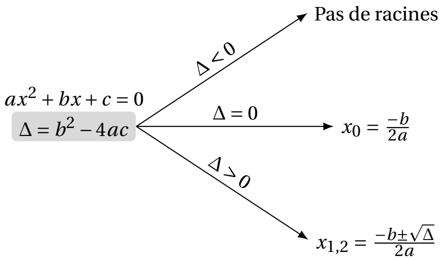
Partie I - Notions de survie

Polynômes du 1^er^ degré

$$ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

Polynômes du 2^nd^ degré



x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a

Identités remarquables

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Proportionnalité (produit en croix)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff a\times d = c\times b$$

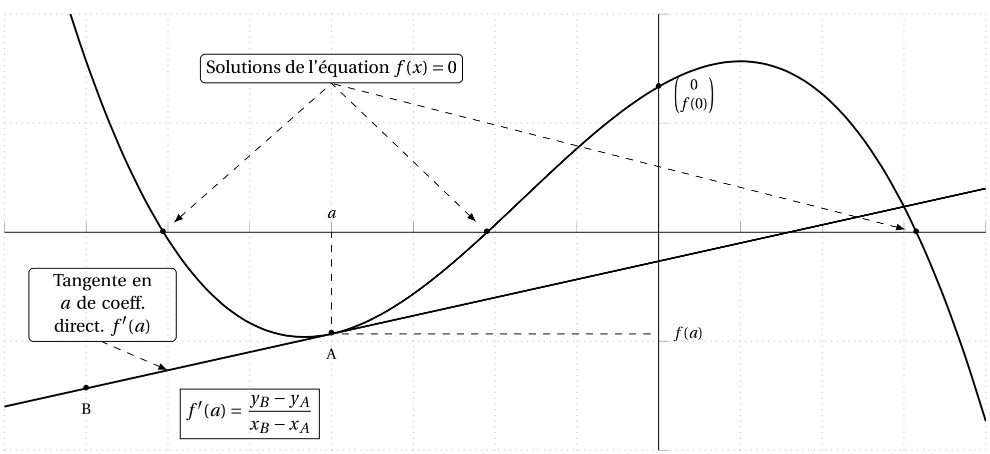
Pour résoudre une équation *(sauf 1^er^ degré)*

- je passe tout dans le membre de gauche
- je factorise
- j'utilise le théorème du produit nul :
  $A\times B=0 \iff A=0$ ou $B=0$

Pour résoudre une inéquation

- mêmes étapes qu'une équation
- je dresse en plus un tableau de signes

Lecture graphique

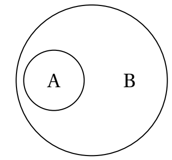


Partie II - Les Pourcentages

t % de de N s'obtient en calculant : $\boxed{\frac{t}{100}\times N}$

La proportion p en pourcentage que représente A dans B est :

$$\boxed{p=\frac{A}{B}\times 100}$$



Augmenter ou diminuer une quantité de t% revient à la multiplier par :

$$\boxed{CM=1-\frac{t}{100}}$$

dans le cas d'une diminution

$$\boxed{CM=1+\frac{t}{100}}$$

dans le cas d'une augmentation

Dans le cas d'évolutions successives, on calcule le CM global en multipliant les CM entre eux :

$$\boxed{CM_g = CM_1\times CM_2\times\ldots}$$

Pour retouver le taux t connaissant le CM *(le signe indiquant une augmentation ou une diminution)* :

$$\boxed{t=(CM-1)\times 100}$$

Formule classique du taux d'évolution connaissant les valeurs de départ et d'arrivée :

$$\boxed{t=\frac{v_a-v_d}{v_d}\times 100}$$

Formule du coefficient multiplicateur réciproque CM_r connaissant le CM *(permet de trouver le taux qui compense une évolution de t%)* :

$$\boxed{CM_r=\frac{1}{CM}}$$

Partie III - Les Fonctions

Application à l'économie

	Notation	*Remarques*
Coût total de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
Coût marginal	$C_m(x) = C'(x)$	coût de la dernière unité produite
Coût moyen	$C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
Recette ou chiffres d'affaires	$R(x) = p \times x$	p est le prix de vente unitaire
Bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$

Méthode pour étudier les variations d'une fonction f

1. je calcule $f'(x)$
2. j'étudie le signe de $f'(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis les variations de f

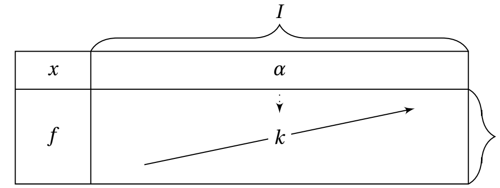
Tableaux des dérivées et des primitives

Fonction f	**Dérivée f'**
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
ku	ku'
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

Fonction f	**Primitive F**
x^n	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \neq 1$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\ln(ax+b)$
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^n}$, $n \neq 1$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u

Rédaction-type du théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

- f est **continue** et **strictement croissante (ou décroissante)** sur I.
- calculer les bornes de l'intervalle image J.
- $k \in J$ donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = k$ admet une seule et unique solution α.
- **balayage à la calculatrice** pour déterminer un encadrement de α



Étude de position :

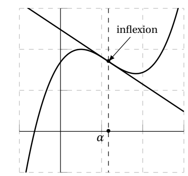
Pour étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ avec un tableau de signes.

Équation de la tangente en a :

$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

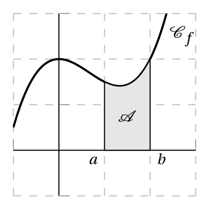
Concavité - convexité : on étudie le signe de la **dérivée seconde** $f''(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	



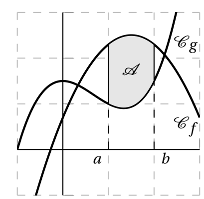
- sur $]-\infty;\alpha[$, f est **concave** donc $\mathscr{C}_f$ est entièrement située **en-dessous** de ses tangentes;
- sur $]\alpha;+\infty[$, f est **convexe** donc $\mathscr{C}_f$ est entièrement située **au-dessus** de ses tangentes;
- en α, $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

Calcul d'une aire à partir d'une intégrale



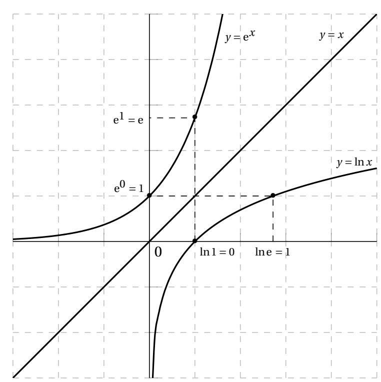
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\mathscr{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Fonction exponentielle et logarithme



$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{na} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n\ln a \qquad \ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\boxed{\ln e^x = e^{\ln x} = x}$$

Partie IV - Les Suites

Nature	Arithmétique	Géométrique
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = q v_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_1 + (n-1)r \\ &= u_2 + (n-2)r \\ &= \cdots \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_1 \times q^{n-1} \\ &= v_2 \times q^{n-2} \\ &= \cdots \end{aligned}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	$\text{premier} \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \cdots = r$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \cdots = q$ $v_{n+1} = \cdots = q v_n$

Limites de suites

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 0 \text{ ou } 0 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leqslant -1 \end{cases}$$

Variations de suites

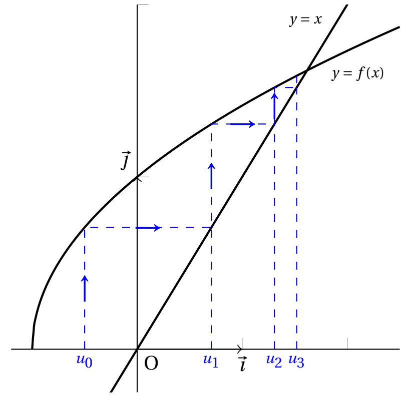
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \implies (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si u est définie explicitement c'est-à-dire que $u_n = f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la définit sur $\mathbb{N}$.

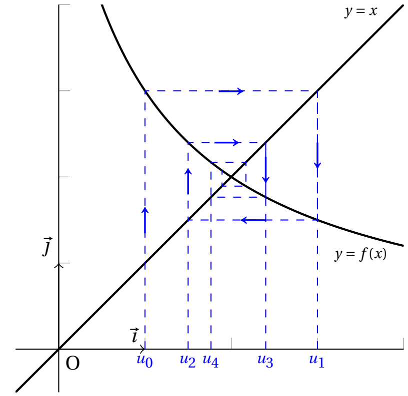
Méthode pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique

1. En général, on a $v_n = u_n + \alpha$ donc on déduit **immédiatement** que $u_n = v_n - \alpha$.
2. On part sur le calcul de v_{n+1} en utilisant la définition de v_n.
3. On remplace u_{n+1} par sa définition (voir énoncé).
4. On effectue les calculs.
5. On remplace u_n par
6. On effectue les calculs.
7. On obtient $v_{n+1} = q v_n$ donc (v_n) est bien géométrique et on déduit que $v_n = v_0 \times q^n$.
8. Comme $u_n = v_n - \alpha$, on a alors $u_n = v_0 \times q^n - \alpha$

Construction graphique des termes de (u_n) dans le cas d'une définition récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$



Croissante convergente



"Escargot" convergent

1. On part de u_0.
2. On prend son image par f : $u_1 = f(u_0)$.
3. On rabat u_1 sur l'axe des abscisses grâce à $y = x$.
4. On répète cette procédure avec u_1, puis u_2, puis u_3, et ainsi de suite ...
5. On peut alors conjecturer les variations de la suite et sa limite.

Algorithmes à connaître

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

```
Affecter à U la valeur 1
Affecter à N la valeur 0
Demander la valeur de K
TANT QUE (N < K) FAIRE
  | Affecter à U la valeur 2 × U + 5
  | Affecter à N la valeur N + 1
FIN TANT QUE
Afficher U
```

① Calcul du terme de rang K

```
Affecter à U la valeur 1
Affecter à N la valeur 0
Demander la valeur de M
TANT QUE (U < M) FAIRE
  | Affecter à U la valeur 2 × U + 5
  | Affecter à N la valeur N + 1
FIN TANT QUE
Afficher N
```

② Algorithme de seuil

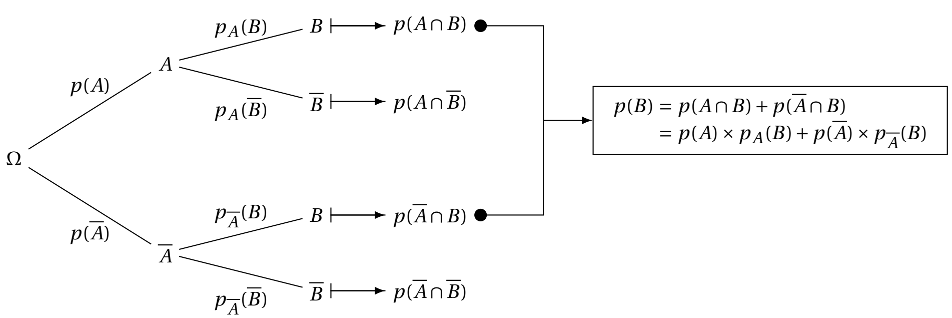
⚠ Pour l'algorithme ①, si on veut faire afficher **tous les termes**, il faut placer l'affichage **dans la boucle**.

Partie V - Les Probabilités

Formules fondamentales

$$\boxed{p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}} \implies p(A\cap B) = p_A(B)\times p(A) \qquad \boxed{p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

Arbre de probabilités



Si A et B sont indépendants : $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$.

Loi binomiale

- On reconnaît un schéma de Bernoulli dans lequel on répète n fois de manière **identiques** et **indépendantes** une épreuve à deux issues (*Succès* - *Échec*) et dont la probabilité du succès est p.
- Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
- X suit alors une *loi binomiale* de paramètres n et p noté $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

$$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \qquad \boxed{p(X\geqslant k) = 1 - p(X<k)} \qquad \boxed{E(X) = np}$$

Loi binomiale à la calculatrice

	Ti	*Casio*
	`2nd` + `VARS`	`OPTN` + `STAT` + `DIST` + `BINM`
$p(X=k)$	`BinomFdp(n,p,k)`	`Bpd(k,n,p)`
$p(X\leqslant k)$	`BinomFrep(n,p,k)`	`Bcd(k,n,p)`
	`MATH` + PRB	`OPTN` + `PROB`
$\binom{n}{k}$	n `Combinaison` k	n `nCr` k

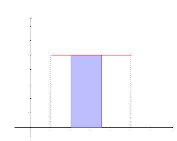
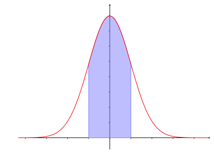
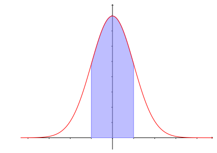
Question classique : on cherche la probabilité de réalisation **d'au moins 1 succès**

$$\boxed{p(X\geqslant 1) = 1 - p(X=0)}$$

Lois continues

Accès au menu de la calculatrice pour calculer avec une loi normale :

- Sur *Ti* : `2nd` + `VARS`
- Sur *Casio* : `OPTN` + `STAT` + `DIST` + `NORM`

	Loi uniforme sur $[c;d]$	Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$	Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Allure graphique			
$p(a\leqslant X\leqslant b)$	$\frac{b-a}{d-c}$	`NormalFRep(a,b,0,1)` `NormCD(a,b,1,0)`	`NormalFRep(a,b,`μ`,`σ`)` `NormCD(a,b,`σ`,`μ`)`
$p(X\leqslant b)$	$\frac{b-c}{d-c}$	`NormalFRep(-10^99,b,0,1)` `NormCD(-10^99,b,1,0)`	`NormalFRep(-10^99,b,`μ`,`σ`)` `NormCD(-10^99,b,`σ`,`μ`)`
$p(X>b)$	$\frac{d-b}{d-c}$	`NormalFRep(a,10^99,0,1)` `NormCD(a,10^99,1,0)`	`NormalFRep(a,10^99,`μ`,`σ`)` `NormCD(a,10^99,`σ`,`μ`)`
Espérance	$\frac{c+d}{2}$	0	μ

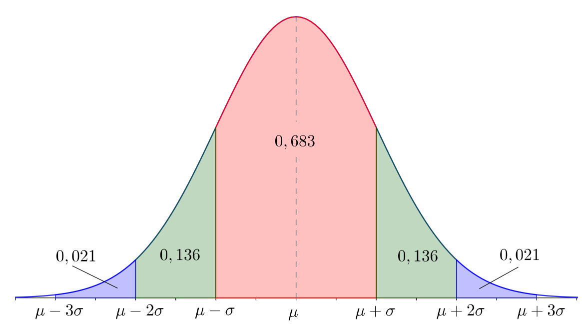
Loi normale : Utilisation de l'inverse normale

On cherche la valeur de k tel que $p(X\leqslant k) = p$:

$$\begin{aligned} k &= \texttt{FracNormale(p,}\mu\texttt{,}\sigma\texttt{)} \to \textit{Ti} \\ &= \texttt{InvNormCD(p,}\sigma\texttt{,}\mu\texttt{)} \to \textit{Casio} \end{aligned}$$

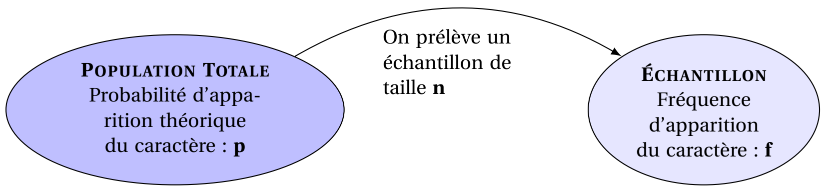
Loi normale : plages de normalité à connaître

$$\boxed{\begin{aligned} p(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma) &\simeq 0{,}683 \\ p(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma) &\simeq 0{,}954 \\ p(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant \mu+3\sigma) &\simeq 0{,}997 \end{aligned}}$$



Partie VI - Échantillonnage et Estimation

VI.1 Échantillonnage



↠ ***Intervalle de fluctuation asymptotique à** 95 %*

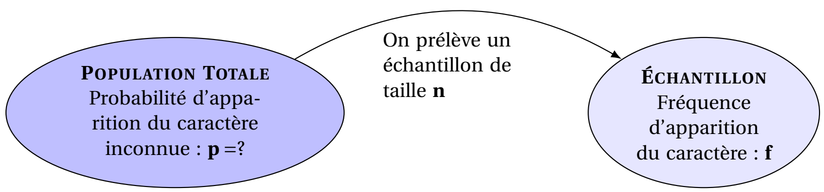
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geqslant 30$
- $np \geqslant 5$
- $n(1-p) \geqslant 5$

$$\boxed{I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}$$

Conclusion : Si $f \in I$ alors on considère que l'échantillon est représentatif de la population.

VI.2 Estimation



↠ ***Intervalle de confiance au niveau de confiance de** 95 %*

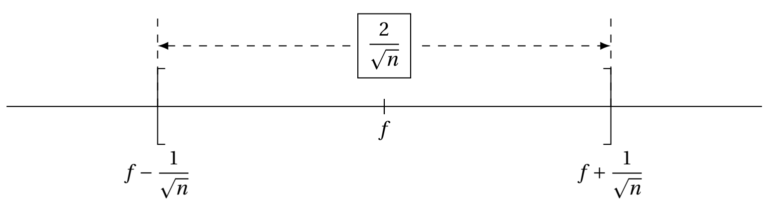
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geqslant 30$
- $nf \geqslant 5$
- $n(1-f) \geqslant 5$

$$\boxed{IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$$

Conclusion : On estime avec un certain niveau de confiance que la probabilité inconnue $p \in IC$.

↠ ***Amplitude de l'intervalle de confiance***



On cherche la taille n de l'échantillon à prélever tel que $\boxed{\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant A}$

Partie VII - Algorithme et Codage

Instructions	Syntaxe **CASIO**	Syntaxe **TI**
Accès aux commandes	`Menu PRGM` `COM` ou `REL`	`PRGM` puis CTL ou E/S `2nd` + `MATH` → TEST
Afficher du texte	`"BLA BLA"↵`	`:Disp "BLA BLA"`
Afficher(x)	`X◢`	`:Disp X`
Saisir(x)	`"X="?→X↵`	`:Prompt X`
Affectation	`5→X↵`	`:5→X`

Structure IF	`If (X<10)↵`
	`Then "MOINS DE DIX"↵`
	`Else "PLUS DE DIX"↵`
	`IfEnd↵`
		`:If (X=10) Then`
		`:Disp "DIX"`
		`:Else`
		`:Disp "PAS DIX"`
		`:End`

Structure FOR	`For 1→K To 10↵`
	`"K VAUT ":K◢`
	`Next↵`
		`:For(K,1,10)`
		`:Disp "K VAUT ",K`
		`:End`

Structure WHILE	`While (N<10)↵`
	`N+1→N↵`
	`WhileEnd↵`
		`:While (N<10)`
		`:N+1→N`
		`:End`

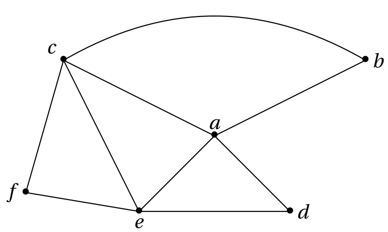
PARTIE VIII - SPÉCIALITÉ

VIII.1 Les graphes

- ***Ordre d'un graphe*** : nombre de sommets du graphe
- ***Degré d'un sommet*** : nombre d'arêtes issues d'un même sommet
- ***Sommets adjacents*** : sommets reliés par une arête
- ***Chaîne ou chemin*** : suite de sommets reliés par des arêtes
- ***Longueur d'une chaîne*** : nombre d'arêtes d'une chaîne
- ***Cycle*** : chaîne fermée (sommet de départ = sommet d'arrivée) dont toutes les arêtes sont distinctes
- ***Graphe connexe*** : deux sommets quelconques sont reliés entre eux par une chaîne
- ***Graphe complet*** : les sommets sont 2 à 2 adjacents
- ***Chaîne eulérienne*** : chaîne contenant une fois et une seule chacune des arêtes
- ***Cycle eulérien*** : chaîne eulérienne fermée
- ***Théorème d'Euler*** :
  - un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair
  - un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair

---

- ***Exemple*** :



- ∗ Graphe connexe d'ordre 6
- ∗ Le sous-graphe $\{a; d; e\}$ est complet
- ∗ Les sommets a et c sont adjacents
- ∗ Chaîne de longueur 3 : $f - c - e - a$
- ∗ Cycle longueur 4 : $c - a - d - e - c$
- ∗ Degré des sommets :

Sommet	a	b	c	d	e	f
Degré	4	2	4	2	4	2

∗ Matrice d'adjacence :

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} = M$$

∗ Tous les sommets sont d'**ordre pair** donc il existe un **cycle eulérien** : $b - a - d - e - a - c - e - f - c - b \Longrightarrow$ c'est un cycle qui contient **toutes les arêtes du graphe**

∗ La matrice M^n permet de déterminer le nombre de chemins de longueur n permettant de se rendre d'un sommet à un autre

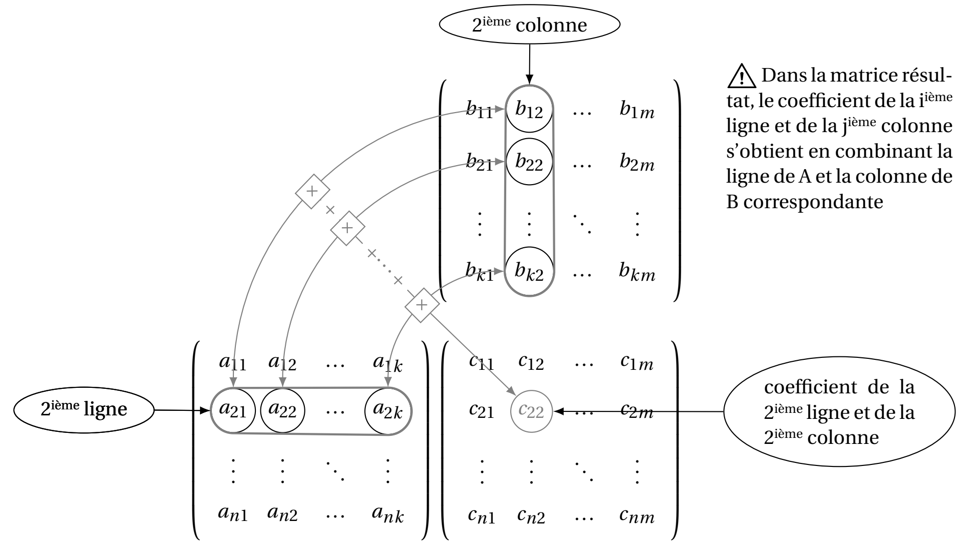
---

- ***L'algorithme de coloration d'un graphe*** :
  - permet d'affecter une couleur à chaque sommet de sorte que 2 sommets adjacents ne partagent pas la même couleur
  - le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorier

- ***L'algorithme de* DIJKSTRA** ou **algorithme du plus court chemin** permet, pour un graphe pondéré, de déterminer le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe

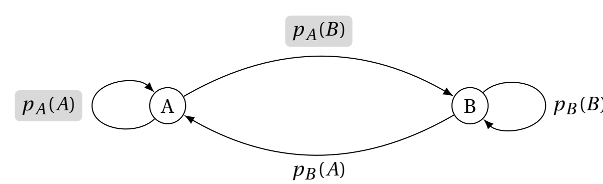
VIII.2 Les matrices

- ***Produit de matrices :***



⚠ Dans la matrice résultat, le coefficient de la iième ligne et de la jième colonne s'obtient en combinant la ligne de A et la colonne de B correspondante

- ***Propriétés*** : A, B et C sont du même ordre n.
  - $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
  - $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
  - $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
  - pour tout réel k, $k \times (A \times B) = A \times (k \times B)$
  - ⚠ En général, $A \times B \neq B \times A$
  - $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n$
  - $A^m \times A^n = A^{m+n}$
  - $(A^n)^p = A^{n \times p}$
  - pour tout réel k, $(kA)^n = k^n A^n$
- ***Matrice inverse*** :
  - $A \times B = B \times A = I_n \iff B$ est l'inverse de A et B est notée $A^{-1} \iff A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$
  - $I_n \times A = A \times I_n = A$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $A \times X = B \iff A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \iff X = A^{-1} \times B$ *(Résolutions de système d'équations)*
- ***Matrice de transition associée à un diagramme de changement d'état*** :



∗ Si l'état initial est décrit par une **matrice colonne** P_0 alors la somme de chaque **colonne** de M vaut 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_B(A) \\ p_A(B) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = M \times P_n \Longrightarrow P_n = M^n \times P_0$$

∗ État stable $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $P = M \times P$

∗ Si l'état initial est décrit par une **matrice ligne** P_0 alors la somme de chaque **ligne** de M vaut 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_A(B) \\ p_B(A) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = P_n \times M \Longrightarrow P_n = P_0 \times M^n$$

∗ État stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ tel que $P = P \times M$